

Title	$x^y = y^x$ ( $0 < x < y$ ) の有理数解ニツイテ
Author(s)	遠山, 啓
Citation	全国紙上数学談話会. 263 p.126-p.128
Issue Date	1944-06-10
oaire:version	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/75110">https://doi.org/10.18910/75110</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

# 1177 $x^y = y^x$ ( $0 < x < y$ ) の有理数解 = ツ イ テ

遠 山 啓 (東京工大)

$x^y = y^x$  ( $0 < x < y$ ), 整数解ヲ求メル問題が Carmichael / *Diophantine Analysis*, 113 頁ニ載ッテ居ル。クシ擴張シテ有理解ヲ求メル問題ヲ解イテ見セウ。結果ハスベテノ解ガ

$$\left. \begin{aligned} x &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ y &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \end{aligned} \right\} (n=1, 2, 3, \dots)$$

デアリ、証明ハ初等的デ、極メテ簡單ニ出来ル。

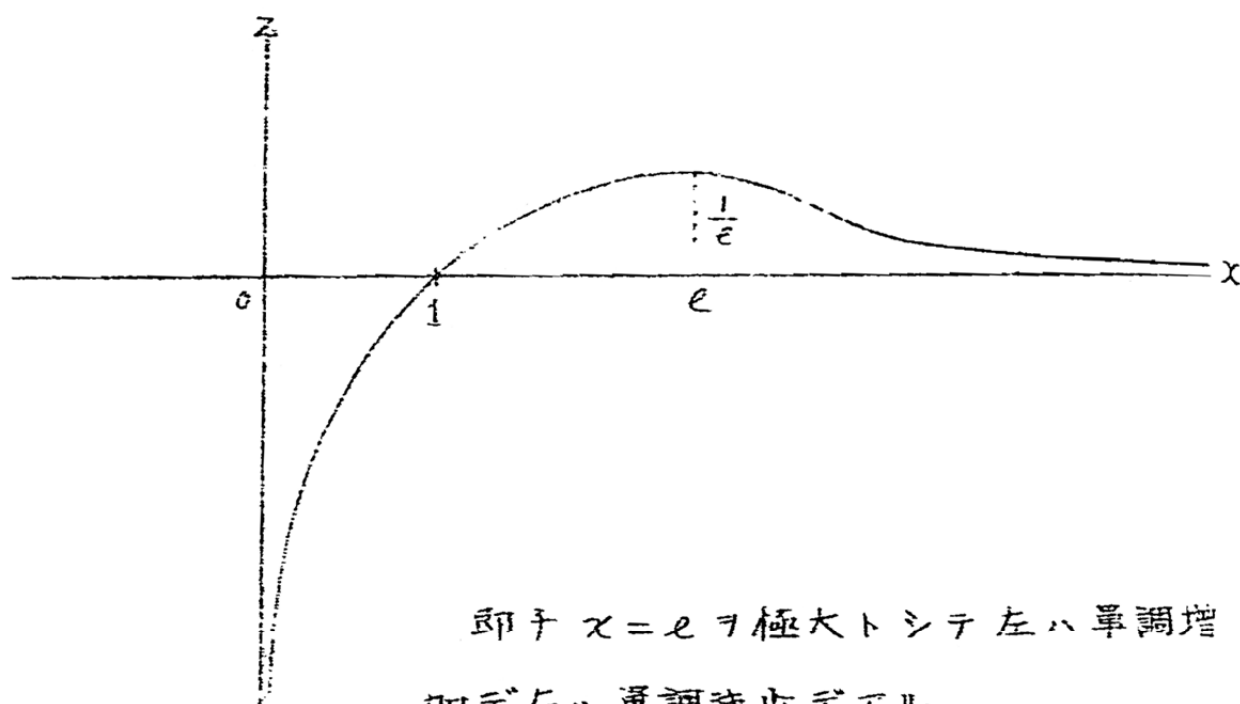
先ヅ方程式ノ  $\log$  ヲ取ツテ見ルト、

$$\frac{\log x}{x} = \frac{\log y}{y} \quad \dots\dots\dots (1)$$

トナル。コノ解ノ性質ヲ見ルタメニ

$$Z = \frac{\log x}{x}$$

ナル曲線ヲ追跡シテ見ルト、次ノヤウニナル。



即ち  $x=e$  を極大トシテ左ハ單調増加デ右ハ單調減少デアル。

故ニ(2)ヲ満足スル  $x, y$  ハ相互ニ一意的ニ他ヲ決定スル等デアル

$\frac{y}{x} = (1 + \frac{1}{t})$  ト置ケバモ一意的ニ決定サレル。

之ヲ原方程式ニ代入スルト

$$x^{x(1+\frac{1}{t})} = (x(1+\frac{1}{t}))^x$$

トナルカラ

$$x^{1+\frac{1}{t}} = x(1+\frac{1}{t})$$

$$x = (1+\frac{1}{t})^t \quad \text{ヲ得ル。}$$

$$y = (1+\frac{1}{t})^{t+1} \quad \text{ナルコトハ明カデアル。}$$

又、 $x, y$  が有理数ナルコトカラ、 $t$  モ亦有理数デアル。

$$t = \frac{n}{m} \quad (m, n) = 1$$

ト置ク。我々ハコゝテ  $m = 1$  ナルコトヲ証明スレバ充分  
デアル。若シ  $m > 1$  トスルト、

$$x = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}} = \left(\frac{n+m}{n}\right)^{\frac{n}{m}}$$

之ガ有理数ナル爲ニハ

$$\begin{cases} n + m = a^m \\ n = b^m \end{cases}$$

トナル。

$$m = a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + b^{m-1})$$

然ルニ右辺ハ明カニ

$$(a - b) \underbrace{(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + b^{m-1})}_{m \text{ 個}} > m$$

トナル。故ニ  $m > 1$  トナルコトハ出来ヌ。即チ  $m = 1$  デナ  
ケレバナラス。

故ニ  $x^y = y^x$  ( $0 < x < y$ ) / 有理数解ハ

$$\left. \begin{aligned} x &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ y &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

デ盡サレル。コノ解ガエヲ挟ンデレニ近ヨルコトモ明カデ  
アラウ。 (終)

(昭和19年5月3日)